On AP(G)-algebras and Multipliers of Banach algebras (AP(G)代数とBanach代数の積作用素の研究)

著者	頼 漢卿
号	413
発行年	1973
URL	http://hdl.handle.net/10097/23834

氏名・（本籍）	LAI HANG-CHIN 頼　漢卿
学位の種類	理学博士
学位記番号	理第　４１３　号
学位授与年月日	昭和４８年１０月２４日
学位授与の要件	学位規則第５条第２項該当
最終学歴	国立清華大学数学研究所卒業
学位論文題目	On $A^p(G)$—algebras and Multipliers of Banach algebras （$A^p(G)$代数とBanach 代数の積作用素の研究）
論文審査委員	（主査） 教授　深宮　政範　　教授　洲之内源一郎 教授　土倉　保

論　文　目　次

論　文　内　容　要　旨

本文は$A^p(G)$代数の性質及びBanach代数の積作用素に関する函数解析的研究の結果で，主として五章にまとめて作成した論文で，付録は解析に関する三篇の論文を含めて居る。

文中のGは局所コンパクト可換加群で，指標群を$\hat{G}=\Gamma$とする。$A^p(G)$をFourier変換が$L^p(\hat{G})$に属する$L^1(G)$函数の全体として，ノルムを

$$\|f\|^p=\max(\|f\|_1,\ \|\hat{f}\|_p)\qquad 1\leqq P<\infty$$

で定義する，これは$\|f\|_1+\|\hat{f}\|_p$と同値である。此の$A^p(G)$空間は上のノルムで且つconvolution productを積として一つの正規半単純且可換なBanach代数となり，p（$1\leqq p<\infty$）に対応して$A^p(G)$は$L^1(G)$に於て稠密なidealの増加系列をなす。

第1章に於ては，主として$A^p(G)$の性質を調べた結果を述べた。

(a)　1°．$A^p(G)$の閉集合Iがidealとなる必要十分条件はIが移動不変な部分空間であることである

2°．$\hat{G}$の中で0を含む任意のコンパクト集合K及び任意な開近傍$u\supset K$に対して，$A^p(G)$の函数fが存在して，K上で$\hat{f}=1$，Uの外で0且つ$0\leqq\hat{f}\leqq 1$．

3°．若し$f\varepsilon A^p(G)$と$\hat{f}(0)=0$，且つ$\hat{G}$の原点に関する近傍系$\{U_\lambda\}$に対して各々の測度は$\leqq 1$ならば，任意の$\varepsilon>0$に対して，元素のnet$\{k_\lambda\}\subset A^p(G)$が存在して次の性質を持つ，(i) $\|k_\lambda\|^p<3$，(ii) U_λ内のある0近傍で$\hat{k}_\lambda=1$，U_λ外では$\hat{k}_\lambda=0$，(iii) $\|f*k_\lambda\|^p<\varepsilon$．

4°．$f\varepsilon A^p(G)$で$\hat{f}(0)=0$ならばnet$\{u_\alpha\}\subset A^p(G)$が$\hat{G}$の0近傍で$\hat{u}_\alpha=0$となる様に存在して$\lim_\alpha\|f*u_\alpha-f\|^p=0$　が成立する

(b)　$A^p(G)$代数は正規で且つDitkin条件は$\hat{G}$の任意の点及び無限遠点に於ても成立する。又，次のSilov定理が$A^p(G)$について成立する：Iが$A^p(G)$の閉idealで，$f\varepsilon A^p(G)$が$\varepsilon k(h(I))$とする。但しk，hはkernelとhullを表す。若しhull(f)のSilov境界とhull(I)の共通部が孤立点しかもたない時，$f\varepsilon I$　となる。特にIが$A^p(G)$の閉idealで，hull(I)は離散ならば，$I=k(h(I))$と成る．又

(c)，$A^p(G)$が近似単位を持つが有界とは限らない事と，$A^p(G)$の閉idealと$L^1(G)$の閉idealが一対一対応している事を注意して，各閉primaryidealが極大になる事が証明できる。最後に次の定理が証明される。

(d)　Gを非離散な局所コンパクト可換群で$1<p<2$，$1/p+1/q=1$の時，$L^1(G)\cap L^p(G)$は$A^q(G)$の中で第一範疇稠密集合である。之に反してGが離散なら任意の$p\geqq 1$に対して，$A^p(G)=\ell^1(G)\cap\ell^p(G)=\ell^1(G)$。

第Ⅱ章は$A^p(G)$の積作用素の代数をあるBanach空間の共役空間$A_p(G)^*$として表わす事，及び$A^p(G)$に関する同型定理を研究した。その主な結果として次の定理が得られた。

(a) $A^p(G)$, $1 \leqq p < 2$, の積作用素代数$M(A^p)$ はあるBanach 空間の共役空間$A_p(G)^*$と等距離同型である。特にGが無限なコンパクト群の時, $A_p(G)^*$は準測度空間$P(G)$と等距離同型に成る。同様に$L^{p_1}(G) \cap L^{p_2}(G)$ の積作用素の代数も研究した。

(b) $L^{p_1}(G) \cap L^{p_2}(G)$ の積作用素代数はあるBanach 空間の共役空間$D_{p_1, p_2}(G)^*$と等距離同型である。

(c) もし$\varPhi$が$A^p(G_1) \to A^p(G_2)$ のontoな代数同型とする, 且つ$\hat{G}_1$, $\hat{G}_2$ のどれか一つは連結性を持つと, G_1 とG_2 は位相同型に成る。

(d) 同様な方向の附随的な研究として次の結果が得られた。

$$M(L^1(G),\ A^p(G)) \cong A^p(G) \qquad 1 < P \leqq 2$$

第Ⅲ章は$A^p(G)$のFourier 変換のrestriction と作用函数について研究した結果を述べた。まず$\varGamma$をGの指標群, HをGの閉部分群, $\varLambda$をHの$\varGamma$におけるannihilator とすると$(G/H)^\wedge = \varLambda$, $\hat{H} = \varGamma/\varLambda$ が成立つ, 之に対して$A^p(G)$, $A^p(G/H)$, 或は$\hat{A}^p(\varGamma)$, $\hat{A}^p(\varLambda)$の関係を知る事は$A^p(G)$, $\hat{A}^p(\varGamma)$のreduction として重要である。本章の結果は次の通りである。

(a) $\varLambda$がopen又はcompactな部分群ならば, $\hat{A}^p(\varGamma)$の$\varLambda$-restrictionは$\hat{A}^p(\varLambda)$で, 且つ$\lambda : \hat{A}^p(\varLambda) \to \hat{A}^p(\varGamma)$となる線型写像によるliftingが存在して, $Res \cdot \lambda = Id$,且つ夫々$\|\lambda\| = 1$, 或は$\|\lambda\| < 1 + \varepsilon$.

(b) $\varPhi : \hat{A}^p(R^n) \to \hat{A}^p(R^n/Z^n) = \hat{A}^p(T^n)$ 及び$\varPhi_1 : \hat{A}^p(T^n) \to \hat{A}^p(R^n)$となる連続な線型写像$\varPhi$, $\varPhi_1$ が存在する。然し, $\varLambda$が任意閉部分群の時は未決定で残された.

之等の応用として次の結果が得られる.

(c) Gを非コンパクトな局所コンパクト可換群とし, $\varGamma = \hat{G}$とする。又, 閉区間$[-1, 1]$で定義された函数$F(t)$が$F(0) = 0$とする。もし$\hat{f} \varepsilon \hat{A}^p(\varGamma)$ 且つrange$\hat{f} \subset [-1, 1]$なる時常に$F(\hat{f}) \varepsilon \hat{A}^p(\varGamma)$となるならば, Fは$[-1, 1]$上の解析函数である.

この結果はGが離散の時はWiener, Lévy, Katznelson の知られた定理に帰着する。又, Gがコンパクトで$1 \leqq p \leqq 2$ならばFは必ずしも解析的と限らない。Gがコンパクトで$p > 2$の場合は問題として残された.

第Ⅳ章は積作用素の拡張として考えた閉作用素を研究した。先ずXを$L^1(G)$ 上の閉作用素Aで次の条件を満たすものとする。(ⅰ) Aの定義域D(A)は$L^1(G)$ に於て稠密, (ⅱ) Aは畳積と可換である 即ち,

$f \varepsilon D(A)$, $g \varepsilon L^1(G) \to f * g \varepsilon D(A)$ 且つ$A(f*g) = Af*g = g*Af$

このように定義した閉作用素に関して, 若し$f \varepsilon D(A)$ ならば, Af はある$\hat{G}$上の連続函数φと$\hat{f}$の積に等しい事が知られ, その連続函数φをAのFourier変換と定義した。一般にφは有界でないが次の結果が得られる。

(a) $\varphi(\hat{x})$は$\hat{G}$上の連続函数で, ある$L^1(G)$ の稠密集合の任意な函数fに対して, $\varphi(\hat{x})\hat{f}(\hat{x})$が又

$L^1(G)$ 函数のFourier変換になる必要十分条件は $\varphi(x)$ がXの一つの閉作用素AのFourier変換である。その他閉作用素Aについての性質を導いた。

又，上の定理を用いればBochnerの定理は次の様に述べられる事が分る。

(b) $\varphi(\hat{x})$ は $\hat{G}$ 上の連続函数とすると次の（ i ），（ ii ）は同値である。

（ i ） $\varphi=\hat{A}$, $A\varepsilon X$ 且つ $\|A\|\leqq M$

（ ii ） $\hat{G}$ 内の任意なコンパクト集合に対して，g_k は次の様に定義すると，$g_k(x)=\int_k(x,\hat{x})\hat{e}_\alpha(\hat{x})\varphi(\hat{x})d\hat{x}$, $g_k \varepsilon L^1(G)$ 且つ $\|g_k\|_1 \leqq CM$, そこで $\{e_\alpha\}$ は L^1 の近似単位元で $\|e_\alpha\|\leqq C$, $\forall \alpha$。

(c) 若し $\{e_\alpha\}$ を $L^1(G)$ の近似単位元で，各 $\hat{e}_\alpha$ はコンパクト台を持ち，$\varphi(\hat{x})$ は $\hat{G}$ 上の連続函数で，g_k は上に定義した通りとすると，$g_k>0$ の必要十分条件は $\varphi(\hat{x})$ が $\hat{G}$ 上の正定値な函数である・

最後の第V章は一般のBanach 代数Aの積作用素代数についての研究で，Aは（有界な）近似単位元を持つと仮定する。A^*，A^{**} をそれぞれAの第一，第二共役空間で，Arens 積を導入すると A^{**} は又Banach 代数になることは知られている。そこでAが可換とか，半単純代数であってもその性質は A^{**} に保有されない。Aを自然な写像 π で A^{**} 内に埋め込んだ時，$\pi(A)$ は A^{**} の部分代数で必ずしもideal ではない。本章のAは可換と限らないので，その積作用素は左，右或は二重として議論し，その積作用素代数を夫々 $M_\ell(A)$，$M_r(A)$，$M(A)$ で表わす。定義は次の通り：

先ずTをAの有界線型作用素として

$$T\varepsilon M_\ell(A) \Longleftrightarrow T(x\cdot y)=(Tx)\cdot y \qquad \forall x,\ y\varepsilon A$$

$$T\varepsilon M_r(A) \Longleftrightarrow T(x\cdot y)=x\cdot(Ty) \qquad \forall x,\ y\varepsilon A$$

$$T=(T_\ell,\ T_r)\ \varepsilon M(A) \Longleftrightarrow x\cdot T_\ell y=T_r x\cdot y \qquad \forall x,\ y\varepsilon A$$

本章の目的は $M_\ell(A)$ をあるBanach 代数に埋め込んで，Aのidealizerとなるものを見出す事。もう一つの目的は $M_\ell(A)$ があるBanach 空間の共役空間と等距離同型である事を証明することである。今

$$M_\ell'(A)=\{F\varepsilon A^{**};\ F*\pi(a)\ \varepsilon\ \pi(A),\ a\varepsilon A\}$$

$$\theta_\ell: M_\ell'(A)\to M_\ell(A),\quad q: A^{**}\to A^{**}/J_\ell,\quad J_\ell=\theta^{-1}(0)$$

とすると θ_ℓ はonto- 準同型で，qは $\pi(A)$ を等距離で A^{**}/J_ℓ に写す。そして次の結果が得られる。

$$M_\ell(A)\cong q(M_\ell'(A))$$

特に $J_\ell=(0)$ 且つ $\pi(A)$ が A^{**} の両側閉idealの時は：$M_\ell(A)\cong A^{**}$。

$J_\ell=(0)$ はAのArens 積が正規ならば成立つ。

上の結果を利用すると次の事が証明できる。

（ i ） A，Bを二つのBanach代数として近似単位元を持つとする。若し $\rho: A\to B$ が連続なonto- 準同型ならば，ρ は $M_\ell(A)\to M_\ell(B)$ のinto準同型に拡大される。

（ⅱ） 若し上の ρ が into- 準同型で，且つBがあるBanach 空間Eの共役空間ならば，ρ は M_ℓ（A）→B上の into 準同型に拡大できる。

（ⅱ）の主要な応用は代数AをHilbert空間上の有界線型作用素として表現した場合，その表現はAの積作用素上に拡張できる事である。（ⅰ）の応用として次の結果が証明される。

Xを局所コンパクトHausdorff空間で，各 $t\varepsilon X$ に対して，A(t)は夫々のBanach代数とする。次にfibre 空間｛X，A(t)｝に於て本文中に示されたある条件を満足するcross sectionsの集合をFとする。其の時に次の如き等距離同型が証明される。

$$M_\ell\,(C_F\,(X,\ A(t)))\cong B_F\,(X,\ M_\ell\,(A(t)))$$

ここに右辺は有界なF－strictly 連続な M_ℓ（A(t)）－値の函数を表わす。左辺の C_F（X，A(t)）はA(t)－値の連続な函数で無限大の所は0に近づく函数の空間を表わす。特に興味のある結果としては凡てのA(t)が一つのBanach代数Aと同型な場合で，此の時等距離同型定理：

$$M_\ell\,(C_0\,(X,\ A))\cong B\,(X,\ M_\ell(A))$$

が得られる。

最後の一節は次の通りに M_ℓ(A)はあるBanach 空間の共役空間として表わされる事を示した。

Aは有界な近似単位元を持つ，BはAの左Banach A-moduleで $A\cong B^*$，Sは

$\{u\ ;\ u=\sum_{i=1}^{\infty} f_i g_i,\ f_i\varepsilon A,\ g_i\varepsilon B$ で $\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_A\|g_i\|_B<\infty\}$，Sのノルムを

$\|u\|=\inf\sum_{i=1}^{\infty}\|f_i\|_A\|g_i\|_B$ で定義すると，等距離同型

$$M_\ell\,(A)\cong S^*$$

が成り立つ。

上の結果は M_ℓ（A）について述べたが，Mr（A）とM（A）に関する結果は同様な形が得られる。

論 文 審 査 の 結 果 の 要 旨

本論文は局所こむぱくと，あーべる群（以下ＬＣＡ群と略称）Ｇ上のBanach 代数$A^p(G)$に関する調和解析の主要事項と，近似単位系をもつ一般なBanach代数の積作用素代数を研究したものであって，Ⅰ～Ⅳ章は前者に，Ⅴ章は後者に属する。

第１章に於ては一般に$A^p(G)$代数は半単純可換なBanach代数で，必ずしも有界でない近似単位元系をもち，Ditkin条件を満足し正則なBanach代数で，従って閉イデアールの構造に関するSilov 定理が適用可能であることが証明される。又，別に群Ｇがnon-discreteで$1<p<2$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$となるとき$L^1\cap L^p(G)$は$A^q(G)$において稠密な第Ⅰ類集合であること等も証明される。

第Ⅱ章に於ては$A^p(G)$代数の積作用素とHelson型同型定理が研究されてあり，前者については之を$C_o(G)$のあるBanach subalgebra $A_p(G)$の共役空間の元素として表現することを$1\leqq p<2$に対して証明し，後者についてはＬＣＡ群G_1，G_2の夫々の$A^p(G_1)$，$A^p(G_2)$が代数的同型であるとき，もし群G_1のDual $\hat{G}_1$が連結ならば，群G_1，G_2は位相同型となることが示され$L^1(G)$に関するHelson定理と類似が知られる。

本章では附随的研究としてＧ上の二，三の他の函数空間に対する積作用素を調べている。

第Ⅲ章は$A^p(G)$代数のFourier 変換の代数$\hat{A}^p(\Gamma)$の作用函数と，部分群への制限について研究したもので，本章の主要部分はＧのDualΓのopen又はcompact な部分群Λに対し$\hat{A}^p(\Lambda)$への$\hat{A}^p(\Gamma)$からのrestriction及びそのcoretractionについて，R^nの商群T^nに対して$\hat{A}^p(R^n)$から$\hat{A}^p(T^n)$への全射線型写像について論じたものであり，此結果を用いて，$\hat{A}^p(\Gamma)$代数の所謂作用函数は，Ｇがnon-compact ならば，解析函数であることを証明し得て古いKatznelsonの定理を拡張したと考える。

第Ⅳ章に於ては$L^1(G)$代数のdense ideal で定義されＧの移動と可換な閉作用素として$A^p(G)$の積作用素を考察し，そのような閉作用素を$L^1(G)$のFourier 変換を介して解析し，種々な性質や定理を示したものである。

第Ⅴ章に於ては，一般Banach代数の積作用素を対象とし，近似単位元系をもつ一般Banach代数Ａの積作用素代数$M_\ell(A)$（$M_r(A)$，$M(A)$についても同じ）はＡの第２共役A^{**}においてＡのIdealizorとしてcharacterize されるとの主要定理及び之より数多くの興味ある結果の誘導が示されている。但しA^{**}はArens 積によるBanach 代数と見做すのである。

参考論文３篇も解析的に興味ある内容を含んで居るものである。

之等の研究はAbel群の調和解析及びBanach代数に寄与する処が少くない，仍って頼漢卿提出の論文は理学博士の学位論文として合格と認めた。